La valeur, le temps et le taux

Jean-Charles Bagneris

v2017.09.1

Résumé

Principes et formules de base pour les calculs d'actualisation et capitalisation communément appelés "mathématiques financières".

Mots clés : valeur, flux de liquidité, valeur actuelle, valeur future, taux d'actualisation, actualiser, capitaliser, annuité

Table des matières

Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce module, les étudiants devraient pouvoir :

- Expliquer l'origine et les principes des calculs d'actualisation
- Comprendre la définition et l'usage du taux d'actualisation
- Définir les méthodes des intérêts simples et des intérêts composés
- Choisir et utiliser les formules appropriées pour diverses opérations telles que l'actualisation, le calcul d'annuités
- Construire un tableau de remboursement d'emprunts pour les trois modes de remboursement les plus courants : *in fine*, remboursements constants, annuités constantes.

1 Introduction : la valeur et le temps

Nous sommes tous conscients du temps qui passe, même si nous n'y pensons pas à chaque instant. Une des conséquences de cette notion du temps est que nous pouvons imaginer et anticiper des évènements futurs. Nous craignons certains de ces (potentiels) évènements, nous en attendons d'autres avec impatience. Les enfants veulent toujours que leur anniversaire arrive le plus tôt possible, les adultes veulent leur salaire à la fin du mois, et tout retard est extrêmement mal vécu.

En finance, on fait généralement l'hypothèse que les agents craignent l'incertitude (ils ont de *l'aversion pour le risque*) et qu'ils préfèrent recevoir une somme d'argent le plus tôt possible (ils expriment une *préférence pour le présent*). Ces deux facteurs, aversion pour le risque et préférence pour le présent, ont un impact sur la valeur des flux de liquidité (ou cash-flows) futurs (c'est-à-dire l'argent que nous espérons recevoir[1] à une date future) : plus ils sont éloignés dans le temps, plus faible est leur valeur perçue aujourd'hui. Cet impact du temps sur la valeur peut se mesurer précisément avec les outils que nous présentons ci-dessous.

Les calculs de la valeur de l'argent en fonction du temps doivent donc prendre en compte deux facteurs : l'aversion pour le risque et la préférence pour le présent.

La prérérence pour le présent impacte les calculs au travers de la variable temps, ou plus précisément, une variable qui indique combien de périodes (jours, mois, années) il faut attendre avant de recevoir (payer) une somme d'argent. Naturellement, plus grand est le nombre de périodes à attendre, plus faible est la valeur qui sera attribuée au cash flow aujourd'hui.

L'aversion pour le risque est prise en compte au travers d'une *prime de risque*. Attention, l'aversion pour le risque ne signifie pas que l'agent ne veut pas prendre de risque, mais seulement que plus le risque est élevé, plus élevée sera l'incitation (récompense monétaire) nécessaire pour qu'il accepte de prendre ce risque. La prime de risque est la récompense supplémentaire obtenue compte tenu du niveau de risque supporté. La détermination de la prime de risque n'est pas traitée dans ce document[2], mais nous devons comprendre comment la prendre en compte, et au travers de quelle variable. L'exemple ci-dessous va nous y aider.

---

1. Remarquez que recevoir ou payer une somme d'argent sont des opérations symétriques, seule la direction change : quand quelqu'un reçoit de l'argent, quelqu'un en verse (un paiement est un transfert). De ce fait, dans la suite, payer ou recevoir font référence à la même opération, un transfert d'argent. La seule différence est le point de vue auquel on se place.
2. Le sujet de la détermination de la prime de risque est traité au chapitre “Rendement et risque” de n'importe quel manuel de finance.

Exemple 1

Supposez que vous venez d'être pris pour un job d'été dans une banque. Votre travail nécessite que vous vous habilliez de façon formelle, vous devez donc acheter de nouveaux vêtements. Le problème, c'est que ce sont des vêtements coûteux, et que vous ne pouvez vous permettre cette dépense avant d'avoir reçu votre premier salaire à la fin du mois. En terme financiers, vous attendez un cash flow futur dans un mois (une période), mais vous avez besoin de l'argent maintenant.

Dans notre contexte, la solution est toute trouvée, c'est le crédit : vous empruntez l'argent (vous travaillez pour une banque, rappelez-vous). Naturellement, vous devrez payer pour ce service (on vous prête l'argent sur une période[a]). Le paiement dans ce cas s'appelle l'intérêt, comme vous le savez, et dépend à la fois d'un *taux d'intérêt*, et de la *durée* du prêt (une période dans notre cas).

La durée du prêt est la variable temps, qui prends en compte la préférence pour le présent – vous préférez (ou vous avez besoin de) recevoir l'argent tout de suite.

Où est l'aversion pour le risque, dans cet exemple ? Eh bien, en vous prêtant de l'argent, la banque prend un risque : et si vous ne pouviez rembourser et payer les intérêts à la fin du mois ? La banque, comme n'importe quel agent, a de l'aversion pour le risque et va évaluer le risque qu'elle prend en vous prêtant ce montant précis, pour cette durée, et à vous en particulier (ici le risque est faible parce que le montant l'est également, la durée est courte et vous êtes un employé de la banque). L'évaluation du risque va résulter en une prime de risque que la banque ajoutera au taux d'intérêt de base qu'elle applique aux clients : comme nous l'avons vu, elle accepte de prendre le risque, mais demande une récompense plus élevée en fonction de celui-ci.

Notez enfin que le montant que vous pouvez dépenser maintenant (en théorie votre salaire attendu) est réduit du montant des intérêts que vous aurez à payer à la fin du mois (parce qu'avec votre salaire, vous devrez rembourser le prêt *et* verser les intérêts en plus).

a. La justification éthique ou philosophique de l'intérêt dépasse de très loin l'objet de ce document. Notez simplement que le concept d'intérêt ne va pas de soi et a été, et est toujours, controversé. De fait, certaines branches de la finance (en particulier la finance islamique) excluent la notion d'intérêt et la remplacent par des façons différentes de partager risque et profit entre prêteur et emprunteur.

Dans cet exemple, la prime de risque est cachée dans le taux d'intérêt. En fait, c'est toujours le cas dans les calculs de valeur de l'argent dans le temps, et le taux est appelé *taux d'actualisation*. Le taux d'actualisation peut être un taux d'intérêt, mais une définition plus générale est de dire que c'est le coût d'opportunité des ressources.

Encore une fois, plus le risque est élevé, plus grands seront la prime et le taux, et donc les intérêts à payer : plus grand est le risque, plus faible est la valeur que vous attribuez aujourd'hui au cash flow futur (plus faible est le montant que vous pouvez dépenser dans l'exemple ci-dessus).

La valeur que vous attribuez aujourd'hui à un cash flow futur est appellée sa valeur actuelle, et est souvent notée VA, ou mieux, CF_0. Nous pouvons maintenant reformuler ce que nous venons d'observer sur les effets de la préférence pour le présent et de l'aversion pour le risque sur la valeur :

- plus le nombre de périodes avant de pouvoir recevoir un cash flow est grand, plus faible est la valeur actuelle de ce cash flow ;
- plus le risque associé au cash flow est important, plus faible est la valeur actuelle de celui-ci.

Dans la suite de ce document, nous allons traduire ces assertions en formules de base, et ensuite présenter des extensions de ces formules utiles dans des opérations réelles, telles que le remboursement des prêts.

2 Calculs de base, définitions

2.1 Cash flows, temps et décisions financières

La plupart des décisions financières peuvent être décrites par une série de flux de liquidité ou cash flows[3], chaque flux ayant une valeur, un sens ou signe (payé ou reçu) et une date d'occurrence.

Exemple 2

Un prêt de 2 000 au taux d'intérêt de 10% sera remboursé en deux paiements, le premier dans un an et le second dans deux ans. Du point de vue de l'emprunteur, la série de cash flows est la suivante (le calcul des intérêts sera détaillé dans la section 2.4 ci-dessous) :

Année	0	1	2
Cash flow	2 000	-1 200	-1 100

Par convention, on écrira t=0 pour l'instant présent (aujourd'hui), parce que ce qui importe, c'est le temps qui s'écoulera avant qu'un cash flow ne soit payé ou reçu. De ce fait, les dates sont calculées par différence avec "aujourd'hui".

La finance suppose de prendre des décisions, et quand on a à prendre une décision, c'est le plus souvent le plus tôt possible, c'est-à-dire, "maintenant". Pour prendre la décision, il faut prendre en compte la série de cash flows associés avec l'opération financière sous-jacente, qui sont généralement de *futurs* cash flows. La décision implique souvent de comparer des cash flows au sein de la série, ou de comparer deux séries de cash flows. Pour prendre une décision rigoureuse, il faut exprimer tous les cash flows à la même date (pour faire des comparaisons valides), et, comme on prend la décision maintenant, cette date sera aujourd'hui, t=0. C'est la raison pour laquelle on calcule et utilise les *valeurs actuelles* des cash flows dans la plupart des décisions financières. Souvenez-vous que pour combiner (additionner) ou comparer (soustraire) des valeurs, il faut qu'elles soient exprimées à la même date (au même point dans le temps) – et dans la plupart des cas, la date choisie est aujourd'hui : les valeurs actuelles sont omniprésentes dans la plupart des décisions financières.

2.2 Valeur actuelle et actualiser

Calculer une valeur actuelle est un peu comme faire voyager l'argent dans le temps : on calcule quelle part d'un cash flow futur serait disponible immédiatement si on devait trouver un moyen de le recevoir tout de suite.

Comme on l'a vu dans l'exemple 1, il est en fait réellement possible de le faire, de rendre l'argent disponible immédiatement. Une des façons d'y parvenir est de trouver un financement maintenant, et entraîne de supporter le coût de ce financement. Une autre possibilité serait d'allouer de l'argent prévu pour autre

3. En toute rigueur on ne devrait utiliser que "flux de liquidité" en français, mais "cash flow" est passé dans le langage financier courant depuis bien longtemps. Dans la suite de ce document, les deux termes seront utilisés indifféremment.

chose à notre projet. On supporterait alors ce qu'on appelle un coût d'opportunité, car on renoncerait au gain éventuel sur le projet original (l'autre chose) en échange du gain potentiel sur le nouveau projet. D'une façon comme de l'autre, le cash flow futur servira de compensation dans la méthode choisie : rembourser un prêt, ou ré-allouer de l'argent au projet différé.

Vous comprenez naturellement ce que cela signifie : quelle que soit la façon d'obtenir de l'argent immédiatement à partir d'un flux de liquidité futur, il y a un coût associé, que ce soit celui du financement ou un coût d'opportunité.

Vous pourriez objecter que nous pourrions avoir une ressource disponible immédiatement, ce qui n'entraînerait aucun coût. Dans ce cas, cette ressource pourrait être placée, par exemple, et produire des intérêts. L'utiliser pour autre chose aurait alors un coût : les intérêts auxquels il faudrait renoncer. Aucune ressource n'est réellement gratuite.

Calculer une valeur actuelle revient simplement à retirer le coût du financement ou le coût d'opportunité du cash flow futur. Comme on l'a déjà vu, ce coût dépend du temps et augmente avec celui-ci, et il dépend également d'un taux (taux d'intérêt, coût de financement, taux d'opportunité comme le taux reçu sur un placement etc.), et il augmente également avec le taux. Ce taux est appelé taux d'actualisation, car on l'utilise pour *actualiser*: rendre actuel, donc calculer la valeur actuelle.

Actualiser un cash flow futur signifie calculer sa valeur actuelle. Pour ce faire, nous avons besoin de la valeur future du cash flow, de la date à laquelle ce cash flow est supposé apparaître, et d'un taux d'actualisation.

2.3 Valeur future et capitaliser

Certaines opérations financières sont plutôt destinées à préparer le futur : économies, assurance, anticipation de la retraite etc. Dans ce cas, nous savons en principe combien nous voulons mettre de côté, et nous voulons calculer la somme qui sera disponible dans le futur.

Cette opération est exactement l'inverse de l'actualisation, et elle est appelée capitalisation. Au lieu d'enlever le "coût du temps" de la valeur future, on ajoute le "gain du temps" à la valeur actuelle pour trouver la valeur future.

Ici, on aura besoin de la valeur actuelle du cash flow, de la date à laquelle nous voulons calculer la valeur future et d'un taux (parfois appelé taux de capitalisation) pour pouvoir faire le calcul.

2.4 Le cas d'une seule période

L'intérêt

Comme on vient de le voir, le taux d'actualisation n'est pas toujours un taux d'intérêt, il peut aussi représenter le coût d'autres sources de financement, ou même un taux d'opportunité. Il est toutefois utile de consacrer quelques lignes au taux d'intérêt, sans perte de généralité puisque les formules d'actualisation et de capitalisation resteront les mêmes, quelle que soit la nature du taux d'actualisation ou de capitalisation.

Dans le cas du taux d'intérêt, le coût du financement est représenté par l'intérêt, justement, c'est-à-dire le paiement que l'emprunteur doit verser au prêteur pour le rémunérer, en plus du remboursement du capital. Comme actualiser est équivalent à enlever le coût du financement d'un cash flow futur, actualiser dans le cas des intérêts signifie enlever les intérêts du cash flow futur. Il faut donc pouvoir calculer les intérêts.

Il se trouve qu'il n'y a qu'une façon de calculer les intérêts dus sur une seule période – les complications arrivent quand il y a plus d'une période.

Sur une seule période, l'intérêt est *toujours* calculé sur le capital restant dû (pour un prêt), ou sur le capital disponible sur le compte (pour un placement), au **début de la période**. Ce montant est simplement multiplié par le taux d'intérêt pour une période (appelé *taux périodique*), pour obtenir le montant des intérêts.

Ainsi, en utilisant les notations suivantes :

Int l'intérêt à verser sur la période ;

r le taux d'intérêt d'une période (taux périodique) ;

CRD le capital restant dû en début de période ;

On écrira :

$$Int = CRD \times r \tag{1}$$

Exemple 3

Un dépôt de 500 sur un compte sur livret rémunéré à 3% par an aura produit au bout d'un an :

$$500 \times (3/100) = 15$$

Attention, dans le calcul, il faut toujours exprimer la durée et le taux d'intérêt de façon cohérente : dans l'exemple ci-dessus, le taux d'intérêt est donné “par an”, et la période est d'un an : c'est correct. Si la base est différente, il faut calculer un taux périodique.

Valeur actuelle et valeur future

En utilisant la formule ci-dessus, on peut calculer que le prêteur sur un prêt d'une seule période obtiendra à la fin de celle-ci[4] un flux total qui est la somme du remboursement du capital et du paiement des intérêts. La *valeur future* du capital prêté au début de la période est donc ce capital, augmenté des intérêts. De façon symétrique, la *valeur actuelle* du cash flow que le prêteur recevra à la fin de la période est ce cash flow, diminué du montant des intérêts (le coût du financement pour l'emprunteur), c'est-à-dire le capital initial. Écrivons tout ceci :

CF_0 valeur actuelle, littéralement ”cash flow en $t = 0$”

CF_1 valeur future en $t = 1$

r taux d'intérêt pour une période

Int intérêts de la période

4. On suppose ici que les intérêts sont *postcomptés* (payés à la fin de la période) car c'est de très loin le cas le plus fréquent. Voir intérêts prépayés pour le cas contraire.

Remarquez que l'on utilise dorénavant “valeur actuelle” pour le capital restant dû. De ce fait, l'équation 1 ci-dessus s'écrit :

$$Int = CF_0 \times r$$

La valeur future est le capital initial (capital restant dû ou valeur actuelle), augmenté des intérêts :

$$CF_1 = CF_0 + Int = CF_0 + CF_0 \times r = CF_0 \times (1 + r) \tag{2}$$

Et la valeur actuelle (ou capital initial) est la valeur future diminuée du montant des intérêts :

$$CF_0 = CF_1 - Int = CF_1/(1 + r) \tag{3}$$

Exemple 4

Vous avez emprunté de l'argent sur un an au taux de 4,1% par an. A la fin de l'année, vous versez un total de 2 914,8 au prêteur, intérêts inclus. Quel était le montant que vous avez emprunté ?

Remarquez que cette question est la même que “quelle est la valeur actuelle d'un cash flow futur de 2 914,8 à recevoir en fin d'année 1 si le taux d'actualisation est 4,1% par an ?”

En utilisant l'équation 3 ci-dessus, on obtient :

$$CF_0 = 2\,914,8/(1 + 4,1/100) = 2\,914,8/1,041 = 2\,800$$

Qu'arrive-t-il s'il y a plus d'une période, comme souvent dans la vie courante, où nous empruntons ou plaçons sur plusieurs années ? Les principes de base (enlever le coût du financement pour obtenir la valeur actuelle, calcul de l'intérêt d'une période) restent les mêmes, mais nous devons traiter deux cas différents, suivant la façon dont les intérêts sont calculés. Ces deux cas sont appelés la *méthode des intérêts simples* et la *méthode des intérêts composés*.

3 Calculs à intérêts simples

3.1 Principe des intérêts simples

Dans le cas des intérêts simples, les intérêts produits ou dûs sur une certaine somme (capital) ne sont jamais ajoutés au capital initial : ils ne sont jamais *capitalisés*. De ce fait, si aucun mouvement n'affecte le capital de départ, les intérêts restent les mêmes période après période : ils sont calculés sur la même base. L'intérêt pour *n* périodes est simplement *n* fois l'intérêt d'une période.

Notez que la méthode des intérêts simples est en principe utilisée pour des durées courtes. Vous pouvez considérer que pour toutes les opérations dont la durée à l'origine est inférieure à un an, on utilise les intérêts simples.

3.2 Calcul de la valeur future

De la même façon que nous avons noté CF_1 un cash flow futur à payer ou recevoir à la fin de la période 1 (c'est-à-dire la valeur future à l'instant 1), on notera CF_n un cash flow à payer ou à recevoir à la fin de la période n, c'est-à-dire la valeur future à l'instant n.

La définition des intérêts simples ci-dessus nous indique que l'intérêt pour n périodes est n fois l'intérêt d'une période. On aura donc :

$$CF_n = CF_0 + n \times Int = CF_0 + n \times CF_0 \times r = CF_0 \times (1 + nr) \tag{4}$$

On rappelle que r est le taux d'actualisation.

Exemple 5

Un dépôt sur un compte d'épargne rapportera 0,25% d'intérêt par mois. Quel sera le montant disponible sur le compte après 8 mois si le dépôt initial était 3 500 ? Encore une fois, on fera l'hypothèse qu'il n'y a plus aucun mouvement sur le compte après le dépôt initial.

Remarquez que cette question est équivalente à “quelle est la valeur future d'une dépôt de 3 500 au taux périodique de 0,25% après 8 périodes si on utilise la méthode des intérêts simples ?”

On obtient :

$$CF_8 = 3\,500 \times (1 + 8 \times 0,25/100) = 3\,570$$

3.3 Calcul de la valeur actuelle

Obtenir la valeur actuelle à partir de la valeur future est trivial en utilisant l'équation 4 ci-dessus, et on aura :

$$CF_0 = CF_n/(1 + nr) \tag{5}$$

Exemple 6

Quelle est la valeur actuelle d'un cash flow de 12 642,32 à recevoir dans 5 jours, si le taux d'actualisation est 0,01% par jour ?

$$CF_0 = 12\,646,32/(1 + 5 \times 0,01/100) = 12\,640$$

3.4 Cas des intérêts précomptés

Jusqu'à présent, dans tous les exemples, les intérêts étaient payés par l'emprunteur au prêteur à la fin de chaque période. Il arrive parfois que l'intérêt soit versé au début de la période – bien qu'il soit calculé de la même façon. Cette convention est appelée l'intérêt précompté.

Le tableau ci-dessous résume les différences de cash flows entre la méthode des intérêts précomptés et celle des intérêts postcomptés dans le cas d'une seule période. L est le montant du prêt et r le taux d'intérêt périodique. Les cash flows sont notés CF_0 et CF_1 et sont montrés du point de vue de l'emprunteur : si le cash flow est négatif, c'est un paiement en faveur du prêteur.

Cash flow	CF_0	CF_1	$CF_1 - CF_0$
Intérêt postcompté	L	$-L \times (1 + r)$	$-L \times r$
Intérêt précompté	$L \times (1 - r)$	$-L$	$-L \times r$

Qu'est-ce qui change ? On peut remarquer que le montant de l'intérêt versé dans chaque cas est le même : $L \times R$, c'est-à-dire la différence entre le cash flow de la période 1 et celui de la période 0. Mais dans le cas des intérêts précomptés, les intérêts sont versés d'avance, ce qui a pour conséquence un montant disponible pour l'emprunteur plus faible – qui versera pourtant les mêmes intérêts : le cas des intérêts précomptés est plus coûteux, parce que les intérêts versés sont les mêmes, mais le capital effectivement disponible est plus faible.

Cela signifie qu'on ne peut pas comparer directement les taux d'opérations précomptées et postcomptées : pour le même taux nominal, l'opération précomptée est plus chère, et le taux réellement payé est :

$$\frac{L \times r}{L \times (1 - r)} = \frac{r}{1 - r} > r$$

Exemple 7

Supposez un prêt de 1 000 sur un mois au taux de 0,4% par mois, intérêts précomptés.

Les intérêts du prêt sont $1\,000 \times 0,4/100 = 4$.

Comme l'intérêt est précompté, l'emprunteur reçoit en fait $1\,000 - 4 = 996$ en $t = 0$, et versera 1 000 au total en $t = 1$. Le taux d'intérêt réellement payé sur l'opération est donc :

$$4/996 = 4,016\%$$

Finalement, remarquez que nous avons présenté l'intérêt précompté dans la section de l'intérêt simple. C'est parce que les intérêts précomptés sont habituellement utilisés sur des opérations courtes, pour lesquelles on utilise la méthode des intérêts simples.

4 Calculs à intérêts composés

4.1 Intérêts composés : intérêt sur l'intérêt

Dans la méthode des intérêts composés, les intérêts sont *capitalisés* (ajoutés au capital) à la fin de chaque période, et donc commencent à produire eux-mêmes des intérêts : c'est ce que l'on appelle *l'intérêt sur l'intérêt*.

La méthode des intérêts composés est généralement utilisée pour toutes les opérations financières dont la durée à l'origine est de plus d'un an. Elle est par exemple typiquement utilisée pour tous les prêts à moyen ou long terme, ou dans le cadre de la décision d'investissement, etc.

On peut illustrer l'origine de la méthode des intérêts composés par un exemple.

Exemple 8

Supposez que vous empruntez 2 000 sur 2 ans, au taux de 4,5% par an. Vous vous mettez d'accord avec le prêteur pour rembourser le prêt en totalité à la fin de la deuxième année : il n'y a pas de remboursement de capital à la fin de la première année. Toutefois, comme la période de base est l'année, vous devez verser des intérêts à la fin de la première année : $2\,000 \times 4,5/100 = 90$. De ce fait, les cash flows du prêt seront les suivants : vous recevez 2 000 à la date 0, vous payez 90 à la date 1 (les intérêts de la première année ou période) et vous payez 2 090 à la date 2 (remboursement du capital et intérêts de la deuxième année ou période).

Après discussion avec le prêteur, vous modifiez un peu votre accord : vous n'aurez finalement rien à payer à la date 1, en fin de première période. A la place, vous paierez tout à la date 2, en fin de seconde période. Naturellement, comme on dit souvent en finance, *there is no free lunch*[a], les intérêts que vous devez à la date 1 sur la première période vous sont en fait prêtés par le prêteur de la date 1 à la date 2, donc sur une période. Vous devez donc payer de l'intérêt sur l'intérêt de la première période : 90 × 4,5 /100 = 4,05. Au final, dans le cadre de ce nouvel accord, les cash flows sont les suivants : vous recevez 2 000 à la date 0, il ne se passe rien à la date 1, et vous payez 2 184,05 à la date 2, c'est-à-dire 2 000 pour le remboursement du capital, 2 fois 90 pour les intérêts sur les deux périodes, et 4,05 pour les intérêts sur l'intérêt de la première période.

a. "Il n'y a pas de repas gratuit", il n'y a pas de ressource gratuite.

4.2 Calcul de la valeur future

Comme les intérêts sont composés (il y a de l'intérêt sur l'intérêt en période 2, puis de l'intérêt sur l'intérêt sur l'intérêt en période 3, etc.), la valeur future des cash flows croît *géométriquement*. En utilisant les mêmes notations que précédemment, on aura :

$$CF_n = CF_0 \times (1 + r)^n \tag{6}$$

Exemple 9

Un dépôt de 10 000 est placé sur un compte rémunéré à 3,4% par an. Il n'y a aucun autre mouvement sur le compte pendant 5 ans. Quel sera le montant disponible au bout de 5 ans si les intérêts sont composés annuellement ?

Le montant disponible est simplement la valeur future en année 5, c'est-à-dire CF_5:

$$CF_5 = 10\,000 \times (1 + 3,4/100)^5 = 11\,819,60$$

4.3 Calcul de la valeur actuelle

En partant de l'équation 6 ci-dessus, le calcul de la valeur actuelle est trivial :

$$CF_0 = \frac{CF_n}{(1+r)^n} = CF_n \times (1+r)^{-n} \tag{7}$$

Exemple 10

Combien faut-il déposer immédiatement sur un compte d'épargne rémunéré à 3,2% par an, avec composition annuelle des intérêts, pour obtenir 5 000 au bout de 4 ans (il n'y a pas d'autres mouvements sur le compte) ?

$$CF_0 = 5\,000 \times (1+3,2/100)^{-4} = 4\,408,10$$

4.4 Taux périodiques

Vous avez probablement remarqué que la plupart du temps, les taux d'intérêt sont donnés en base annuelle : il arrive même que “par an” ne soit pas spécifié, c'est implicite.

Mais si la période de base de composition des intérêts n'est pas un an, mais un mois ou tout autre durée, comment obtenir le *taux périodique* (le taux pour une période) à partir du taux annuel ?

La réponse n'est pas trop compliquée : le taux périodique se déduit du taux annuel à l'aide de la formule qui lie valeur actuelle et valeur future.

Exemple 11

Un dépôt de 100 est fait sur un compte d'épargne. Il n'y a pas d'autres mouvements sur le compte et au bout d'un, le total disponible sur le compte est 104,8. Quel est le taux annuel de rémunération du compte ?

Ce cas est particulièrement simple, car il n'y a qu'une période, et le taux est donné par la relation entre valeur actuelle et valeur future :

$$\begin{aligned} 104,8 &= 100 \times (1+r) \\ 1+r &= 104,8/100 \\ r &= 104,8/100 - 1 \\ r &= 0,048 = 4,8\% \end{aligned}$$

Jusqu'ici, pas de problème, et le taux de rémunération du compte est 4,8%. Mais que se passe-t-il si en fait, les intérêts sur le compte étaient composés mensuellement, c'est-à-dire 12 fois par an ? Quel est le taux mensuel ?

> Ici, on va de nouveau utiliser la relation entre valeur actuelle et valeur future, mais avec des intérêts composés sur 12 périodes (mois) :
>
> $$\begin{aligned} 104,8 &= 100 \times (1+r)^{12} \\ (1+r)^{12} &= 104,8/100 \\ (1+r) &= (104,8/100)^{(1/12)} \\ r &= (104,8/100)^{(1/12)} - 1 \\ r &= 0,0039146 = 0,39\% \end{aligned}$$

On peut facilement généraliser à partir de cet exemple et formuler une relation entre le taux périodique et le taux annuel dans le cas des intérêts composés. On notera r le taux annuel comme précédemment, et r_n le taux périodique pour n périodes par an (r_{12} sera donc le taux mensuel) :

$$(1+r_n)^n = (1+r)$$

$$r_n = (1+r)^{(1/n)} - 1 \tag{8}$$

Lorsque le taux périodique est calculé de cette façon, le taux annuel est appelé taux équivalent (EAR en anglais). C'est le taux annuel qui donnera exactement la même valeur future avec une composition annuelle des intérêts – d'où l'adjectif "équivalent". C'est le "vrai" taux sous-jacent à l'opération.

Toutefois, pour diverses raisons[5], le taux équivalent n'est pas toujours utilisé. Pour plus de simplicité, les banques, par exemple, utilisent souvent les taux proportionnels (APR en anglais). Le taux proportionnel ne pourrait pas être plus simple : le taux proportionnel annuel est simplement le taux périodique multiplié par le nombre de périodes par an. Inversement, le taux périodique est le taux proportionnel divisé par le nombre de périodes par an.

Dans la suite, à chaque fois qu'un taux sera donné sans autre précision, vous pourrez considérer qu'il s'agit d'un taux proportionnel annuel.

4.5 Annuités et autres séries de cash flows

Jusqu'ici nous avons utilisé dans les exemples des opérations très simples : il n'y avait que deux cash flows, un au début (la valeur actuelle) et un à la fin (la valeur future), et pas de cash flows intermédiaires. Mais en pratique, on a souvent une série de cash flows associés à une opération : on rembourse les prêts par des versements étalés sur plusieurs années, une agence immobilière reçoit les loyers de ses locataires tous les mois, un investisseur reçoit des coupons et des remboursements sur son portefeuille d'obligations.

Dans le cas le plus commun, quand tous les cash flows sont différents et qu'il ne suivent aucune relation particulière (comme croître à un taux constant), il n'y a pas le choix : il faut actualiser les cash flows

5. Essayez donc d'expliquer à votre grand-mère pourquoi on ne divise pas le taux annuel par 12 pour avoir le taux mensuel.

un par un, pour obtenir une série de valeurs actuelles sur laquelle on va travailler en comparant ou en ajoutant celles-ci par exemple.

Exemple 12

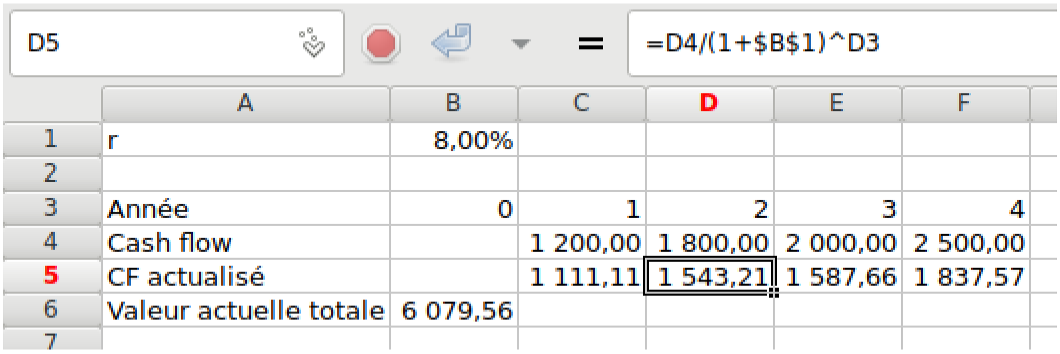
Quelle est la valeur actuelle totale de la série de cash flows ci-dessous si le taux d'actualisation est 8% ?

Année	1	2	3	4
Cash flow	1 200	1 800	2 000	2 500

Il n'y a pas d'autre choix qu'actualiser chacun des cash flows, en utilisant l'équation 7, et ajouter les 4 valeurs actuelles résultant pour en obtenir le total :

$$\frac{1\,200}{(1+8/100)} + \frac{1\,800}{(1+8/100)^2} + \frac{2\,000}{(1+8/100)^3} + \frac{2\,500}{(1+8/100)^4} = 6\,079,56$$

La figure 1 montre les calculs détaillés sur un tableur. Remarquez la formule de la valeur actuelle dans la zone de saisie.



D5 =D4/(1+B1)^D3

	A	B	C	D	E	F
1	r	8,00%				
2						
3	Année	0	1	2	3	4
4	Cash flow		1 200,00	1 800,00	2 000,00	2 500,00
5	CF actualisé		1 111,11	1 543,21	1 587,66	1 837,57
6	Valeur actuelle totale	6 079,56				
7						

Fig. 1 : Actualiser une série de cash flows

Heureusement, il y a des formules qui permettent d'obtenir directement les valeurs actuelles ou futures de séries de cash flows constants (ou en croissance constante), dès lors que ceux-ci sont versés à intervalles réguliers (chaque mois, chaque trimestre etc.). Quand la série de cash flows est infinie, on parle d'une perpétuité, quand elle a une durée finie et des cash flows constants, on l'appelle rente ou annuité constante.

Valeur actuelle d'une perpétuité

Comme nous ne sommes pas immortels, il nous semble souvent qu'une perpétuité – une série infinie de cash flows – n'est pas quelque chose de très courant en pratique. En fait, les perpétuités sont assez communes en finance : il existe des obligations perpétuelles, et il est en général commode de se représenter les dividendes futurs qu'une société versera sur ses actions comme une perpétuité.

Naturellement, nous cherchons la *valeur actuelle* de la perpétuité, puisque par définition, elle n'a pas de valeur future.

Le cas le plus simple est une perpétuité de cash flows constants : on attend le même cash flow à la fin de chaque période, pour toujours. On note le cash flow constant *a* (pour annuité, mais encore une fois, la période peut-être jour, mois, trimestre, année, etc.) et la valeur actuelle est donnée par :

$$CF_0 = \frac{a}{r} \tag{9}$$

Exemple 13

Quelle est la valeur actuelle d'une série infinie de cash flows de 10 000 versés à la fin de chaque année si le taux d'actualisation est 4,6% ?

$$CF_0 = 10\,000/(4,6/100) = 217\,391,30$$

Certaines perpétuités croissent à un taux constant : chaque flux est calculé à partir du précédent, augmenté d'un certain pourcentage, noté *g* (pour *growth*, croissance en anglais). Donc, si on note a_i le cash flow reçu en fin d'année *i*, on a :

$$a_{i+1} = a_i \times (1+g)$$

La valeur actuelle d'une telle perpétuité est donnée par :

$$CF_0 = \frac{a_1}{r-g} \tag{10}$$

Exemple 14

Une action est supposée verser un flux perpétuel de dividendes, payés en fin d'année, et en croissance de 0,8% par an. Le premier (le dividende attendu à la fin de cette année) sera de 2,3. Quelle est la valeur actuelle de la perpétuité si le taux d'actualisation est 12,4% ?

$$CF_0 = \frac{2,3}{(12,4/100 - 0,8/100)} = 19,83$$

Valeur actuelle d'une série finie de flux constants

Encore plus communes en finance que les perpétuités, les séries finies de cash flows constants sont utilisées par exemple pour tous les prêts remboursés par versements (annuités) constants.

Dans ce cas, il nous faut une formule qui donne la valeur actuelle de la série de cash flows : dans le cas d'un prêt, ce sera le capital initial (le montant prêté au début), puisque c'est le cash flow versé en date zéro (à l'emprunteur par le prêteur).

La formule se déduit facilement de celle de la perpétuité, lorsqu'on réalise qu'un flux fini de cash flows constants est la différence entre deux perpétuités constantes, une qui démarre immédiatement, et une qui démarre juste après le dernier versement. La démonstration complète dépasse le cadre de ce document et est laissée à la sagacité du lecteur.

Encore une fois, *a* est le cash flow constant, également appelé rente ou annuité (quelle que soit sa périodicité) :

$$CF_0 = a \times \frac{(1-(1+r)^{-n})}{r} \tag{11}$$

On peut naturellement “retourner” la formulation pour obtenir l’annuité à partir de sa valeur actuelle :

$$a = CF_0 \times \frac{r}{(1-(1+r)^{-n})} \tag{12}$$

Exemple 15

Un prêt sur 10 ans sera remboursé par annuités (versements) constantes de 13 076,54. Le taux d’intérêt est 5,2%, quel est le montant du prêt (le capital) ?

Remarquez que comme le prêt est sur 10 ans, on considère que les intérêts sont composés, et comme les versements sont annuels, les intérêts sont composés annuellement.

Le montant du prêt est la valeur actuelle des 10 versements ou annuités :

$$CF_0 = 13\,076,54 \times \frac{(1-(1+5,2/100)^{-10})}{(5,2/100)} = 100\,000,01$$

Valeur future d’une série finie de cash flows constants

Certaines opérations, comme l’épargne, sont un peu différentes : on dépose un certain montant chaque période sur un compte rémunéré et on veut savoir combien sera disponible sur le compte à une certaine date, c’est-à-dire la valeur future de l’annuité ou paiement périodique.

On supposera que *n* est le nombre de versements, et que l’on calcule la valeur future juste après le dernier versement. Adaptez le calcul si les conditions sont différentes, par exemple, ajoutez une période d’intérêts si la valeur future est calculée une période après le dernier versement.

$$CF_n = a \times \frac{((1+r)^n - 1)}{r} \tag{13}$$

Encore une fois, obtenir l’annuité à partir de la valeur future est trivial :

$$a = CF_n \times \frac{r}{((1+r)^n - 1)} \tag{14}$$

Exemple 16

Une famille décide d’épargner 500 chaque mois sur un compte rémunéré à 0,35% par mois (composition des intérêts mensuelle). Combien sera disponible sur le compte après 12 ans (juste après le dernier versement) ?

On supposera donc qu’il y a 12×12 versements ici, puisqu’ils sont mensuels.

$$CF_{144} = 500 \times \frac{((1 + 0,35/100)^{(12 \times 12)} - 1)}{(0,35/100)} = 93\,410,49$$

Autres paiements périodiques

Notez qu'il existe des formules pour d'autres types de paiements périodiques, tels que les séries en croissance (soit d'un montant constant, soit d'un taux constant). Ces formules sont assez peu utilisées en pratique, et dépassent le cadre de ce document. Si vous en avez besoin, cherchez simplement "growing annuity" ou quelque chose de ce genre sur internet.

Valeur actuelle nette

Une opération très commune est le calcul de la *valeur actuelle nette* d'une série de cash flows. Dans ce cas de figure, on a typiquement à verser un montant immédiatement pour s'attribuer une série de cash flows futurs. Par exemple, vous achetez un appartement maintenant pour toucher des loyers des locataires dans le futur. La valeur actuelle nette est simplement la valeur actuelle de tous les futurs cash flows, moins le paiement que vous faites immédiatement pour les acquérir. Remarquez que le paiement initial, étant immédiat, est déjà une valeur actuelle, et donc la comparaison est légitime. On obtient donc la valeur actuelle, nette du paiement de départ : la valeur actuelle nette. Ce concept est étudié en détail dans le cadre de la décision d'investissement.

Exemple 17

On vous propose d'acquérir un *voucher* vous donnant droit à "dix ans de vacances gratuites". En fait, le voucher vous permet de dépenser 2 000 chaque année dans des hôtels de luxe autour du monde, pendant dix ans. Le prix du voucher est 14 000 et la publicité insiste sur les "30% d'économies" que vous faites donc. Quelle est la valeur actuelle nette de l'opération si votre coût d'opportunité (taux d'actualisation) est 7,8% ?

Puisque la période de base est ici l'année, on considère que les intérêts sont composés annuellement.

La valeur actuelle des dix cash flows de 2 000 est donnée par l'équation 11:

$$2\,000 \times \frac{(1 - (1 + 7,8/100)^{-10})}{(7,8/100)} = 13\,542,07$$

Et donc la valeur actuelle nette de la proposition est :

$$13\,542,07 - 14\,000 = -457,93$$

Il semble que ne soit pas une si bonne idée…

4.6 Autres variables

Comme vous avez dû le remarquer, les équations 6 et 7 n'en sont en fait qu'une seule, exprimée dans un sens ou dans l'autre suivant la variable recherchée, valeur actuelle ou valeur future, en supposant connus le taux et le nombre de périodes.

De façon similaire, les équations 11 et 12 sont les mêmes, la première version permet de calculer la valeur actuelle connaissant l'annuité, et la seconde l'annuité pour une valeur actuelle donnée. Et c'est la même chose pour la valeur future de l'annuité.

Il est parfois possible d'utiliser ces équations pour trouver le taux ou le nombre de périodes à partir des autres variables. Un calcul assez courant est de trouver le taux (de rendement) à partir des valeurs actuelle et future et de la durée d'un investissement :

$$r = \left(\frac{CF_n}{CF_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{15}$$

Exemple 18

Vous investissez dans une action pour 145,02. L'action ne verse aucun dividende ou autre paiement, et vous la revendez après 3 ans pour 181,28. Quel a été votre rendement (annuel) sur cette opération ?

Ici la valeur actuelle est 145,02, la valeur future en année 3 est 181,28 et nous cherchons le taux, on utilise donc l'équation 15 ci-dessus :

$$r = \left(\frac{181,28}{145,02}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,0772 = 7,72\%$$

Remarquez que si on a une série de cash flows, et pas simplement un au début (la valeur actuelle) et un à la fin (la valeur future), il n'y a généralement pas de formule explicite pour trouver le taux *r*. En effet, *r* est la racine d'un polynôme dont le degré est le nombre de périodes : pour *n* plus grand que 4, il n'y a pas de formule générale pour une solution[6].

En finance, ce taux est appelé *taux de rendement interne* et les solutions sont recherchées par une méthode approchée. Cette méthode est heureusement disponible dans tous les tableurs et dans les calculatrices financières sous la forme d'une fonction généralement appelée `TRI` (`IRR` en anglais). Son usage est très simple, rappelez-vous simplement de mettre un signe opposé pour des cash flows de directions opposées (les cash flows reçus ont un signe positif, les cash flows payés ont un signe négatif, par exemple).

Exemple 19

Supposez que vous investissez dans une action pour 780. Vous recevez par la suite un dividende à la fin de chaque année, et la série de dividendes est la suivante :

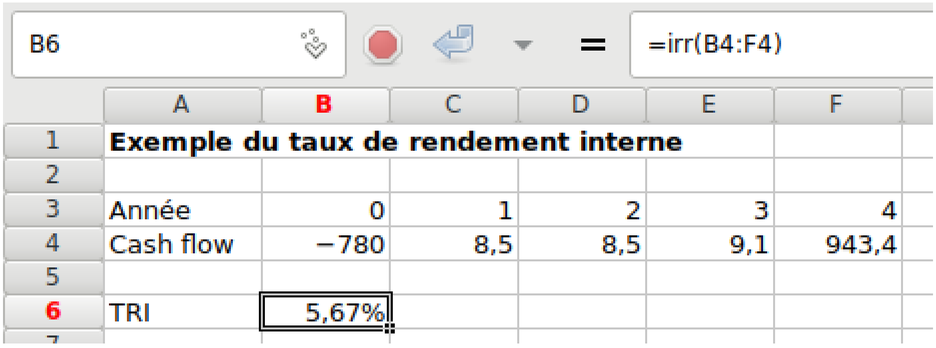
---

6. Cette proposition est connue sous le nom de théorème d'Abel, voir https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27Abel_(alg%C3%A8bre)&oldid=133358686

Année	1	2	3	4
Dividende	8,5	8,5	9,1	9,4

Finalement, l'année 4, juste après avoir reçu le dividende, vous revendez l'action sur le marché pour 934. Quel est votre rendement annuel ?

Comme on a ici des cash flows intermédiaires (les dividendes), il n'y a pas de formule générale pour trouver le taux (qui est le taux de rendement interne de votre investissement). On va donc utiliser un tableur pour le trouver. La figure 2 vous montre le tableau utilisé : remarquez que le cash flow de la période 0 (le prix payé pour l'action) est négatif, et que le cash flow de l'année 4 est la somme du dividende reçu et du produit de la vente de l'action. On utilise la fonction `IRR()` sur la série de cash flows pour trouver le taux et la réponse est finalement 5,67%.



	A	B	C	D	E	F
1	**Exemple du taux de rendement interne**					
2						
3	Année	0	1	2	3	4
4	Cash flow	−780	8,5	8,5	9,1	943,4
5						
6	TRI	5,67%				

Fig. 2 : Calcul du taux de rendement interne

Finalement, une autre question classique est celle du nombre d'années nécessaires pour obtenir un certain capital (valeur future), compte tenu de sa valeur actuelle et du taux :

$$n = \frac{log(CF_n/CF_0)}{log(1+r)} \tag{16}$$

Exemple 20

Combien de temps faut-il pour doubler un capital qui est placé au taux de 7,5% par an (intérêts composés annuellement) ?

Comme le capital n'est pas donné ici, prenons par exemple CF_0=1. De ce fait, on devrait avoir CF_n=2 (on double le capital de départ). A partir de l'équation 6 on écrit :

$$2 = 1 \times (1 + 7,5/100)^n$$

Cette formulation est équivalente à celle de l'équation 16 ci-dessus :

$$n = log(2/1)/log(1,075) = 9,58$$

Il faudra donc un peu moins de 10 ans.

5 Remboursement des prêts

Le calcul des paiements sur les remboursements[7] de prêts sont probablement une des utilisations les plus communes des calculs de valeur de l'argent dans le temps. Un prêt est simplement une série de cash flows :

- le cash flow initial va du prêteur à l'emprunteur et est le montant du prêt ;
- les autres cash flows vont de l'emprunteur au prêteur : ce sont les versements (également appelés "service du prêt") qui vont couvrir d'une part le remboursement du prêt et d'autre part le paiement des intérêts.

Le montant initial du prêt, souvent appelé *capital*, peut être remboursé suivant différentes méthodes en fonction de l'accord entre le prêteur et l'emprunteur. Les trois méthodes les plus classiques sont présentées ci-dessous.

5.1 Les méthodes de remboursement de prêts

Les méthodes de remboursement de prêts les plus répandues sont :

Remboursement *in fine* c'est de loin la plus simple : le montant du prêt est intégralement remboursé le dernier jour de celui-ci, les versements durant la vie du prêt ne sont que des intérêts payés.

Remboursements constants dans ce cas, le même montant de capital est remboursé à la fin de chaque période, et il est donc égal au montant du prêt divisé par le nombre de périodes. Les intérêts à payer sur la période viennent en sus du capital remboursé, naturellement.

Annuité ou versements constants le versement total (part de capital remboursé et intérêt payé) est le même à la fin de chaque période et est donc calculé avec la formule de l'annuité constante 12. Remarquez que la balance entre capital remboursé et intérêts payés est différente pour chaque période.

Quelle que soit la méthode de remboursement choisie, on aura toujours :

- la somme de tous les remboursements périodiques est égale au capital initial (montant du prêt) ;
- l'intérêt pour une période donnée est toujours calculé sur le capital restant dû au début de cette période, suivant la formule 1 ;
- le capital restant dû en fin de période est le capital restant dû en début de période, moins la part de capital remboursé dans la période. Les intérêts n'ont jamais aucune influence sur le capital restant dû (c'est l'inverse) ;
- le capital restant dû au début d'une période est le capital restant dû à la fin de la précédente. Pour la première période, c'est le montant du prêt (capital initial).

Pour mieux comprendre les conséquences de chaque méthode sur la série de cash flows, nous allons utiliser un exemple dans la section suivante.

---

7. Notez bien que le terme "remboursement" s'applique au capital emprunté uniquement. On rembourse du capital, on verse ou paye des intérêts. Par ailleurs, dans ce contexte, (et uniquement dans ce contexte), le mot amortissement est synonyme de remboursement.

5.2 Tableau de remboursement de l'emprunt

Le tableau de remboursement de l'emprunt ou échéancier est la table détaillée de la série de cash flows relative au prêt, période par période.

Ce tableau doit fournir au moins[8] les informations suivantes pour chaque période :

- numéro de période, ou mieux, date exacte à laquelle devront se faire les paiements relatifs à cette période ;
- capital restant dû en début de période ;
- intérêts à payer en fin de période, calculés à partir du capital restant dû en début de période et du taux d'intérêt périodique de l'emprunt ;
- part de capital remboursé dans la période ;
- versement total pour cette période, c'est-à-dire somme des intérêts payés et de la part de capital remboursé ;
- capital restant dû en fin de période, qui sera reporté au début de la période suivante.

Comment construire le tableau de remboursement de l'emprunt

Pour mieux réaliser et comprendre la procédure de construction du tableau, on prendra un même prêt pour exemple, et on construira le tableau de remboursement de celui-ci pour chacune des trois méthodes.

> **Exemple : Prêt exemple**
>
> On supposera un prêt dont le montant initial est 100 000, qui sera remboursé sur 5 ans au taux de 7%. Les intérêts seront composés annuellement car l'année sera la période de base.

L'exemple complet est disponible[9] sur Google Spreadsheet[10].

Remboursement in fine

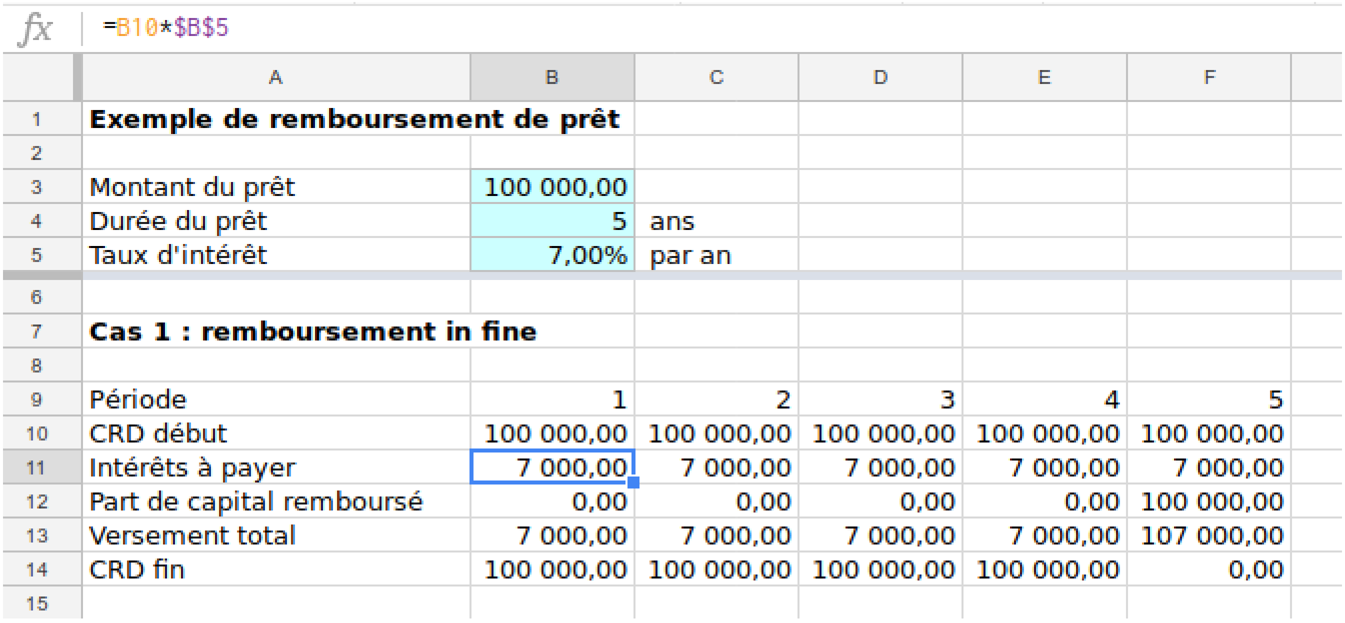
On commence avec la méthode de remboursement *in fine*. Comme on l'a dit, dans ce cas, le remboursement du capital intervient à la fin de la dernière période seulement (*in fine* signifie “à la fin” en latin). La ligne de la part de capital remboursé sera donc toujours à zéro, sauf pour la colonne de la dernière période.

Naturellement, l'emprunteur paie des intérêts sur le capital restant dû à la fin de chaque période. Comme le capital est remboursé en une seule fois à la fin, le capital restant dû ne change pas : c'est le montant total du prêt jusqu'au dernier jour (où il est finalement remboursé en intégralité). De ce fait, les intérêts de chaque période sont toujours les mêmes.

8. Si une assurance est obligatoire pour l'emprunteur, les primes d'assurance à verser sur chaque période sont également incluses dans le tableau de remboursement de l'emprunt.

9. Attention, vous ne pouvez pas l'utiliser directement en ligne, vous devez le télécharger et travailler sur votre propre version.

10. https://docs.google.com/spreadsheets/d/1bdSjfDLasR0In-RdIFR_boC6GhiNMHTfnqmK8_1Hx_Q/



=B10*B5

	A	B	C	D	E	F
1	**Exemple de remboursement de prêt**					
2						
3	Montant du prêt	100 000,00				
4	Durée du prêt	5	ans			
5	Taux d'intérêt	7,00%	par an			
6						
7	**Cas 1 : remboursement in fine**					
8						
9	Période	1	2	3	4	5
10	CRD début	100 000,00	100 000,00	100 000,00	100 000,00	100 000,00
11	Intérêts à payer	7 000,00	7 000,00	7 000,00	7 000,00	7 000,00
12	Part de capital remboursé	0,00	0,00	0,00	0,00	100 000,00
13	Versement total	7 000,00	7 000,00	7 000,00	7 000,00	107 000,00
14	CRD fin	100 000,00	100 000,00	100 000,00	100 000,00	0,00
15						

Fig. 3 : Remboursement in fine

Exemple : Prêt exemple - Remboursement in fine

Dans le prêt exemple, le montant total, 100 000, sera remboursé à la fin de l'année 5, qui est la dernière période. De ce fait, le capital restant dû restera le même et sera égal au montant du prêt.

Les intérêts seront payés au taux de 7% chaque fin d'année sur la base de ce capital restant dû et donc seront toujours de :

$$100\,000 \times 7/100 = 7\,000$$

La figure 3 montre le tableau résultant. Notez la formule de calcul des intérêts en B11, et le remboursement du prêt en F12. Finalement, le capital restant dû en fin d'année 5 est bien sûr zéro : le prêt a été totalement remboursé.

Remboursements constants

Dans ce cas, le montant du prêt (le capital) est remboursé par parts égales à la fin de chaque période : chaque remboursement est donc égal au montant du prêt divisé par le nombre de périodes.

Le capital restant dû décroît au fur et à mesure, et donc les intérêts à payer sont également de plus en plus faibles (souvenez-vous qu'ils sont calculés sur la base du capital restant dû). Finalement, les versements sont donc décroissants.

Exemple : Prêt exemple - Remboursements constants

La part de capital à rembourser à la fin de chaque période est donnée par le montant du prêt divisé par le nombre de périodes :

$$100\,000/5 = 20\,000$$

Tout le reste s'en déduit et vous pouvez vérifier le tableau complet à la figure 4. Remarquez que les fx =B22-B24

	A	B	C	D	E	F
1	**Exemple de remboursement de prêt**					
2						
3	Montant du prêt	100 000,00				
4	Durée du prêt	5	ans			
5	Taux d'intérêt	7,00%	par an			
16						
17	**Cas 2 : remboursements constants**					
18						
19	Remboursement périodique	20 000,00				
20						
21	Période	1	2	3	4	5
22	CRD début	100 000,00	80 000,00	60 000,00	40 000,00	20 000,00
23	Intérêts à payer	7 000,00	5 600,00	4 200,00	2 800,00	1 400,00
24	Part de capital remboursé	20 000,00	20 000,00	20 000,00	20 000,00	20 000,00
25	Versement total	27 000,00	25 600,00	24 200,00	22 800,00	21 400,00
26	CRD fin	80 000,00	60 000,00	40 000,00	20 000,00	0,00
27						

Fig. 4 : Remboursements constants

> intérêts à payer vont en effet en diminuant, de même que les versements de fin de période. Encore une fois, le capital restant dû à la fin de l'année 5 est nul, comme attendu.

Versements ou annuités constants

Dans le cas des versements constants, la somme des intérêts versés et de la part de capital remboursé est constante au long des périodes. De ce fait, on a un cash flow initial, suivi d'une série de cash flows constants et de sens opposé : on est donc dans le cas de l'annuité constante, décrit à la section 4.5 ci-dessus.

Plus précisément, on doit tout d'abord calculer le versement constant en utilisant la formule 12. Le reste des calculs se fait ensuite période par période :

- calculer les intérêts à payer de la période. Pour la première période, les intérêts sont calculés sur le montant total du prêt, qui est connu. Pour les autres périodes, ils sont calculés à partir du capital restant dû en début de période, qui, par définition, est le capital restant dû de la fin de la période précédente ;
- calculer la part de capital remboursé pour cette période en soustrayant les intérêts que l'on vient de calculer de l'annuité constante ;
- calculer le capital restant dû en fin de période en soustrayant la part de capital remboursé du capital restant dû en début de période ;
- passer à la période suivante et repartir du premier point ci-dessus.

fx =B3*B5/(1-(1+B5)^-B4)

	A	B	C	D	E	F
1	**Exemple de remboursement de prêt**					
2						
3	Montant du prêt	100 000,00				
4	Durée du prêt	5	ans			
5	Taux d'intérêt	7,00%	par an			
28						
29	**Cas 3 : annuités constantes**					
30						
31	Annuité constante	24 389,07				
32						
33	Période	1	2	3	4	5
34	CRD début	100 000,00	82 610,93	64 004,63	44 095,88	22 793,52
35	Intérêts à payer	7 000,00	5 782,77	4 480,32	3 086,71	1 595,55
36	Part de capital remboursé	17 389,07	18 606,30	19 908,75	21 302,36	22 793,52
37	Versement total	24 389,07	24 389,07	24 389,07	24 389,07	24 389,07
38	CRD fin	82 610,93	64 004,63	44 095,88	22 793,52	0,00
39						

Fig. 5 : Versements constants

Exemple : Prêt exemple - Annuités constantes

D'abord on calcule le versement constant (annuité) en utilisant l'équation 12:

$$a = 100\,000 \times \frac{(7/100)}{(1-(1+7/100)^{-5})} = 24\,389,07$$

L'intérêt à verser sur la première période a déjà été calculé dans le cas du remboursement *in fine* ci-dessus et il est de 7 000. De ce fait, la part de capital remboursée à la première période doit être :

$$24\,389,07 - 7\,000,00 = 17\,389,07$$

A partir de cette part de capital remboursé la première année (ou période), on peut obtenir le capital restant dû à la fin de celle-ci :

$$100\,000,00 - 17\,389,07 = 82\,610,93$$

Ce qui nous donne également le capital restant dû en début de deuxième année, qui nous permettra de calculer les intérêts à payer, et ainsi de suite.

La figure 5 donne les détails du cas de l'annuité constante. Remarquez le calcul de l'annuité en B31 avec la formule dans la zone de saisie en haut à gauche. Remarquez aussi encore une fois, que, comme attendu, le capital restant dû à la fin de la dernière période est nul : le prêt a bien été remboursé (le total de toutes les parts de capital remboursées est égal au montant du prêt).

Calculer le capital restant dû à une date quelconque

Un calcul très classique est celui du capital restant dû à la fin d'une période donnée. Naturellement, si on dispose du tableau de remboursement du prêt, il suffit d'y lire l'information cherchée. Mais y a-t-il une façon directe de trouver le capital restant dû à la fin d'une période donnée ?

Dans le cas du remboursement *in fine*, la réponse est immédiate : sauf pour la dernière période, le capital restant dû en fin de période est le montant total du prêt, puisque par définition celui-ci ne sera remboursé que le dernier jour.

Dans le cas des remboursements constants, la réponse est facile à obtenir également : le capital restant dû est donné par le remboursement constant multiplié par le nombre de périodes restant à courir.

Exemple 21

Dans le cas du prêt exemple utilisé ci-dessus et des remboursements constants, le remboursement constant était de 20 000 chaque année, c'est-à-dire $100\,000/5$. Donc, pour chercher le capital restant dû en fin d'année 3, on calcule le nombre d'années restant, 5 - 3 = 2 et on multiplie ce nombre par la valeur du remboursement constant 20 000. Cela donne un capital restant dû de 40 000 en fin d'année 3. On peut vérifier que c'est bien le cas sur la figure 4.

Finalement, dans le cas de l'annuité constante cela semble plus difficile. Mais en fait il suffit de se rappeler que quel que soit le capital restant dû, il sera remboursé par les versements restant à produire. Le capital restant dû est donc égal à la *valeur actuelle des versements ou annuités restant* qui peut être calculée à l'aide de l'équation 11.

Exemple 22

Toujours en utilisant le prêt exemple de la section précédente, on peut calculer le capital restant dû en fin d'année 3 dans le cas des annuités constantes.

On se souvient que l'annuité constante était donnée par :

$$100\,000 \times \frac{(7/100)}{(1-(1+7/100)^{-5})} = 24\,389,07$$

A la fin de l'année 3, il reste 5 - 3 = 2 ans à courir. Le capital restant dû est donc la valeur actuelle des deux versements restant :

$$24\,389,07 \times \frac{(1-(1+7/100)^{-2})}{(7/100)} = 44\,095,88$$

Remarquez que, comme l'annuité constante a été arrondie à deux chiffres après la virgule, le calcul ci-dessus peut donner un résultat légèrement différent de celui qu'on lit dans le tableau de remboursement de l'emprunt. On choisira d'être plus précis en utilisant la formule de calcul de l'annuité constante au lieu de sa valeur dans le calcul :

$$100\,000 \times \frac{(7/100)}{(1-(1+7/100)^{-5})} \times \frac{(1-(1+7/100)^{-2})}{(7/100)}$$

On peut simplifier car $(7/100)$ est au numérateur et au dénominateur du calcul résultant :

$$100\,000 \times \frac{(1-(1+7/100)^{-2})}{(1-(1+7/100)^{-5})} = 44\,095,88$$

Vous pouvez vérifier que c'est le bon résultat sur la figure 5.

Résumé

- Les calculs d'actualisation (et donc de capitalisation) ont pour origine l'aversion pour le risque et la préférence pour le présent de la plupart des agents.
- Les calculs prennent en compte la préférence pour le présent au travers du nombre de périodes considérées.
- L'aversion pour le risque est prise en compte par une prime de risque incluse dans le taux d'actualisation.
- Le calcul le plus courant est celui de la valeur actuelle d'un cash flow ou d'une série de cash flows : la valeur actuelle est la valeur maintenant, au temps présent, et donc est adaptée à des décisions à prendre immédiatement.
- Deux systèmes de calcul existent : les intérêts simples et les intérêts composés. La méthode des intérêts simples est en principe réservée à des périodes de temps courtes, de moins d'un an.
- Au delà des formules de base, il existe des formules directes pour des cas courants tels que les perpétuités ou les séries de cash flows constants.
- Les trois modes principaux de remboursement des prêts indivis sont : remboursement *in fine*, remboursements constants, annuités constantes.
- Un tableau de remboursement de prêt liste les cash flows relatifs au prêt, période après période. Ces cash flows comprennent (mais ne sont pas limités à) le capital restant dû en début de période, les intérêts de la période, la part de capital remboursée, le versement total et le capital restant dû en fin de période.

Exercices

Donnez tous les résultats avec deux chiffres après la virgule, mais n'arrondissez que le résultat final : souvenez-vous de ne jamais arrondir un résultat intermédiaire.

1. Quelle est la valeur actuelle d'un cash flow de 48 000 à recevoir dans 3 ans si le taux d'actualisation est 5,8% (taux proportionnel) et les intérêts sont composés mensuellement ?
2. Vous avez déposé 14 000 sur un compte d'épargne il y a 8 ans, et avez ensuite complètement oublié ce compte. Quel est le montant disponible sur le compte maintenant si les intérêts étaient composés annuellement et que le taux de rémunération était 2,5% ?
3. Une action va donner droit à un dividende de 2,05 en fin d'année. Le dividende est versé chaque année et on s'attend à ce qu'il croisse de 0,6% par an pour toujours. Si votre taux d'opportunité est 11,6%, quel est le prix maximum que vous devez payer pour cette action ?
4. Une étudiante emprunte 24 000 à sa banque à 4,7% par an (taux proportionnel). Le prêt sera remboursé par mensualités constantes sur 4 ans.
   - Quel est le montant de la mensualité ?
   - Combien d'intérêts seront à verser à la fin du premier mois ?
   - Quel sera le capital restant dû après 2 ans ?
5. Vous décidez de préparer un voyage autour du monde dans cinq ans. Vous estimez le coût total de ce voyage à 30 000. Combien devez-vous économiser chaque mois sur un compte d'épargne rémunéré 2,3% par an (proportionnel) pour disposer des 30 000 juste avant le voyage ? Considérez 60 mois d'épargne.
6. Le capital restant dû sur un prêt de 10 ans est actuellement de 76 396,74. Le prêt est remboursé par annuités constantes et le taux est 7,8%. Quel était le montant initial du prêt s'il reste 3 ans à courir (on est à la fin de l'année 7) ?
7. Deux banques de détail se font concurrence pour attirer l'épargne de leurs clients. La première promet "de doubler votre capital en 10 ans" alors que la seconde annonce simplement un taux d'intérêt de 7,5%. En supposant une composition annuelle des intérêts, quelle est celle qui procure le meilleur rendement ?

Solutions des exercices

1. Quelle est la valeur actuelle d'un cash flow de 48 000 à recevoir dans 3 ans si le taux d'actualisation est 5,8% (taux proportionnel) et les intérêts sont composés mensuellement ?

   Comme les intérêts sont composés mensuellement, il nous faut le taux mensuel. Le taux étant proportionnel, il suffit simplement de le diviser par 12. Naturellement le nombre de périodes est 3×12 mois.

   Ensuite, en utilisant l'équation 7 on trouve :

$$48\,000 \times (1 + 5,8/(12 \times 100))^{-3\times 12} = 40\,351,16$$

2. Vous avez déposé 14 000 sur un compte d'épargne il y a 8 ans, et avez ensuite complètement oublié ce compte. Quel est le montant disponible sur le compte maintenant si les intérêts étaient composés annuellement et que le taux de rémunération était 2,5% ?

   En utilisant l'équation 6 on trouve :

$$14\,000 \times (1 + 2,5/100)^{8} = 17\,057,64$$

3. Une action va donner droit à un dividende de 2,05 en fin d'année. Le dividende est versé chaque année et on s'attend à ce qu'il croisse de 0,6% par an pour toujours. Si votre taux d'opportunité est 11,6%, quel est le prix maximum que vous devez payer pour cette action ?

   Ici on a une perpétuité qui croît à un taux constant : le cash flow (le dividende) augmente de 0,6% par an pour toujours. Avec l'équation 10 on trouve :

$$2,05/(11,60/100 - 0,6/100) = 18,64$$

4. Une étudiante emprunte 24 000 à sa banque à 4,7% par an (taux proportionnel). Le prêt sera remboursé par mensualités constantes sur 4 ans.

   Comme les intérêts sont composés mensuellement, on utilisera le taux proportionnel divisé par 12, et les périodes sont des mois.

   - Quel est le montant de la mensualité ?
     Le versement est une rente constante, donc en utilisant l'équation 11 on a :

$$24\,000 \times \frac{((4,7/12)/100)}{(1 - (1 + (4,7/12)/100)^{-4\times 12})} = 549,45$$

   - Combien d'intérêts seront à verser à la fin du premier mois ?
     A la fin du premier mois, le capital restant dû est le montant du prêt. Les intérêts à verser sont donnés par l'équation 1:

$$24\,000 \times ((4,7/12)/100) = 94,00$$

   - Quel sera le capital restant dû après 2 ans ?
     Après 2 ans il restera encore 2 ans (donc 48 mois). A partir de l'exemple 22 on a :

$$24\,000 \times \frac{(1 - (1 + (4,7/12)/100)^{-2\times 12})}{(1 - (1 + (4,7/12)/100)^{-4\times 12})} = 12\,562,49$$

5. Vous décidez de préparer un voyage autour du monde dans cinq ans. Vous estimez le coût total de ce voyage à 30 000. Combien devez-vous économiser chaque mois sur un compte d'épargne rémunéré 2,3% par an (proportionnel) pour disposer des 30 000 juste avant le voyage ? Considérez 60 mois d'épargne.

   Ici, on veut que la *valeur future* de l'épargne s'élève à 30 000. On a encore une fois une composition mensuelle des intérêts, donc le taux proportionnel doit être divisé par 12 pour obtenir le taux mensuel, et la période de base est le mois. En utilisant l'équation 14, on a :

$$30\,000 \times \frac{((2,3/12)/100)}{((1+(2,3/12)/100)^{60}-1)} = 472,28$$

6. Le capital restant dû sur un prêt de 10 ans est actuellement de 76 396,74. Le prêt est remboursé par annuités constantes et le taux est 7,8%. Quel était le montant initial du prêt s'il reste 3 ans à courir (on est à la fin de l'année 7) ?

   On connait le capital restant dû et on cherche le montant du prêt : on doit utiliser la méthode de l'exemple 22, mais en renversant la fraction. On obtient :

$$76\,396,74 \times \frac{(1-(1+7,8/100)^{-10})}{(1-(1+7,8/100)^{-3})} = 200\,000,00$$

7. Deux banques de détail se font concurrence pour attirer l'épargne de leurs clients. La première promet "de doubler votre capital en 10 ans" alors que la seconde annonce simplement un taux d'intérêt de 7,5%. En supposant une composition annuelle des intérêts, quelle est celle qui procure le meilleur rendement ?

   Pour répondre à cette question, on peut soit calculer le taux implicite dans la promesse de la première banque, soit calculer par combien sera multiplié un capital après 10 ans s'il est déposé dans la seconde. On choisit la première option : le taux est donné par l'équation 15, et comme le capital est supposé doubler, on prend 1 comme valeur actuelle et 2 comme valeur future :

$$2^{\frac{1}{10}} - 1 = 7,18\%$$

   Donc la seconde banque propose le meilleur taux.